【 76 】

氏　名	**浜　田　雄　策**（はま　だ　ゆう　さく）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論　理　博　第343号
学位授与の日付	昭和46年1月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**On the Propagation of Singularities of the Solution of the Cauchy Problem** （コーシー問題の解の特異点の伝播について）
論文調査委員	(主　査) 教 授 溝 畑　茂　教 授 吉 田 耕 作　教 授 山 口 昌 哉

論　文　内　容　の　要　旨

係数がすべて原点の近傍で正則函数であるような偏微分方程式

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) \equiv \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u(x)=0$$

を考える。ここで $x=(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ は複素変数である。$x_1=0$ が作用素 $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ に対して非特性的であるとし，初期面 $x_1=0$ 上で特異性をもつ初期データを与えた場合，解 $u(x)$ がどのような形で定まるかという問題を申請論文はくわしくとり扱っている。すなわち初期面の特異点を除いて（Cauchy-Kowalewski の定理によって）局所的に定まる解を原点の近傍で解析接続してえられるものであるが，どのような形で定まるかをとり扱っている。

$$h(x;\xi) = \xi_1{}^m + h_1(x, \xi')\xi_1{}^{m-1} + \cdots\cdots + h_m(x, \xi')$$

を $a(x, \xi)$ のm次斉次部分とする。ただし $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)=(\xi_1, \xi')$ とする。さらに $x'=(x_2, \cdots, x_n)$ とかこう。$x_1=0$ 上で与えられた初期データが $x_2=0$ を pole または真正特異点としてもつと仮定する。このとき $x_1=x_2=0$ を通る特性面がm葉の相異なるものからなるとし，それを $K_1, K_2, \cdots, K_m$ とする。このことは解析的には，

$$(*)\quad h(0;\lambda, 1, 0\cdots\cdots 0)=0 \text{ ならば } \frac{\partial}{\partial\xi}h(0;\lambda, 1, 0\cdots\cdots, 0 \neq 0$$

と定式化される。すなわち特性面が単純なる場合である。このときコーシー問題の解 $u(x)$ は，$K_1 \cup \cdots \cup K_m$ を除いた原点の近傍で解析的であり，たとえば初期データが $x_2=0$ を pole とする場合，K_i の定義式を $\varphi^{(i)}(x)=0$ とすると，解 $u(x)$ は原点の近傍で

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{F^{(i)}(x)}{[\varphi^{(i)}(x)]^{p^i}}+G^{(i)}(x)\log\varphi^{(i)}(x)+H^{(i)}(x)\right\}$$

という形で表わされる。このことが参考論文1で示されている。ここで $F^{(i)}, G^{(i)}, H^{(i)}$ は原点の近傍で

正則であり，$p_i(\geq 0)$は整数である。

申請論文では，上記の特性面に関する条件（＊）をとり除いた場合，同様な結論が一般にはなりたたないことを注意している。すなわち

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u-\frac{\partial}{\partial y}u=0,\qquad u(0,y)=\frac{1}{y},\ \frac{\partial}{\partial x}u(0,y)=0$$

の解は，$u(x,y)=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{(2n)!}\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^n$

と表わされ，初期データは $y=0$ を pole としてもつにも拘らず，原点からでる特性曲線 $y=0$ は解の真性特異的である。このような事情を考慮して申請者は $a\left(x,\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ が，いわゆる Levi の条件をみたす場合をとり上げた。すなわち

$$a\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=h_2\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(h_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)^2+b\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)h_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)+c\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

とかかれる場合である。ただし，

（1）$h_1(x,\xi)$, $h_2(x,\xi)$ はそれぞれ l_1, l_2 次の斉次であり，$b(x,\xi)$ はそれぞれ (l_1+l_2-1), $(m-2)$ 次以下である，（2）$h_1(0;\lambda,1,0,\cdots,0)=0$，$h_2(0;\lambda,1,0\cdots0)=0$ の根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{l_1}$, $\mu_1,\cdots,\mu_{l_2}$ は相異なる，とする。

この条件のもとで前にのべた結果が同様になりたつことが示されている。すなわち h_1 に対応する，$x_1=x_2=0$ を通る特性面を $K_i^{(1)}(i=1,\cdots,l_1)$，同様に h_2 に対応する面を $K_j^{(2)}(j=1,\cdots,l_2)$ とすると，初期データが $x_2=0$ 上に pole または真性特異点をもつとき，解 $u(x)$ は $K_1^{(1)}\cup\cdots UK_{l_1}^{(1)}\cup\cdots\cup K_{l_2}^{(2)}$ を除いて，原点の近傍で解析的であり，もっとくわしく，pole の場合

$$u(x)=\sum_{i=1}^{l_1}\left\{\frac{A^{(i)}(x)}{[\varphi^{(i)}(x)]^{p_i}}+B^{(i)}(x)\log\varphi^{(i)}(x)\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{l_2}\left\{\frac{C^{(j)}(x)}{[\phi^{(j)}(x)]^{q_j}}+D^{(j)}(x)\log\phi^{(j)}(x)\right\}+H(x)$$

という形となることが示されている。ここで $\varphi^{(i)}(x)=0$，$\varphi^{(j)}(x)=0$ は $K_i^{(1)}$, $K_j^{(2)}$ の定義式である。

なお参考論文１は，すでにのべたように，特性面がすべて単純である場合を考察したものであり，申請論文の基礎になっている。

論文審査の結果の要旨

申請者のえた結果は新しく，この方面の今後の発展に大きな貢献をするものと思われる。この方面の研究には Ludwig, Mizohata, Gårding, Kotake, Leray 等のものがあるが，これらの研究を大きく発展させたものといえよう。

申請者の手法をみると，形式解から出発する手法が，この問題のとり扱いには，解析接続による手法よりも，より適したものであることがうかがえる。形式解はつぎのようにして構成されている。初期データを，

$$\frac{\partial^j}{\partial x_1{}^j}u(0,x')=0,\ \ j\neq h,\ \ 0\leqslant j\leqslant m-1,$$

$$\frac{\partial^h}{\partial {x_1}^h} u(0,\ x') = (-1)^{\mathrm{p}}(\mathrm{p}-1)!\ \frac{w(x_3, \cdots\cdots, x_{\mathrm{n}})}{x^{p}{}_2}$$

とし，$f_0(s) = \log s$, $f_1(s) = s\log s - s, \cdots$, $\frac{d}{ds} f_{\mathrm{j}}(s) = f_{\mathrm{j}-1}(s)$ によって $f_{\mathrm{j}}(s)(\mathrm{j} \geqq -m)$ を定義し，形式解を

$$u(x) = \sum_{i=1}^{l_1}\left(\sum_{k=-p+h-1}^{\infty} f_{\mathrm{k}}(\varphi^{(i)}(x)) u_{\mathrm{k}}{}^{(i)}(x)\right) + \sum_{j=1}^{l_2}\left(\sum_{k=-p+h}^{\infty} f_{\mathrm{k}}\left(\psi^{(j)}(x)\right) v_{\mathrm{k}}{}^{(j)}(x)\right)$$

とおく。そうすると，$u_0{}^{(i)}(x)$, $v_0{}^{(\mathrm{j})}(x)$ は初期データから一意的に定まるが，Levi 条件をおいた結果，$u_{\mathrm{k}}{}^{(i)}(x)$, $v_{\mathrm{k}}{}^{(i)}(x)$ $(k \geq 1)$ は順次に２階の常微分方程式の解として一意的に定まる。 この形式解の解析性の証明は大層困難なものである。最も簡単な場合に示されている溝畑の手法を細かく再検討し，一般的な評価式をえることに成功し，その結果漸く示されたものである。

このような問題に形式解が有効であることは大変興味深いことであるが，複雑な状況を分析して計算を遂行し，結果に到達していることは申請者の秀れた解析の力を示すものといえよう。また申請論文の最後に与えた例は，Leviの条件をとり除いた場合，解の接続に対して複雑な現象がおこることを示しており，これによって上述の仮定の自然さをあらわすと共に，この方面の今後の研究に示唆を与えていると思われる。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。